Основные понятия и определения

Подобные слагаемые

Слагаемые, которые имеют одинаковую буквенную часть

Пример: 3x и 7x являются подобными

Уравнение

Равенство с одной или несколькими переменными

Примеры:

- x + 2 = 5
- x + 2y + 3 = 15

Корень уравнения

Значение переменной, при котором получается верное числовое равенство

Пример: Для уравнения x + 2 = 5 корнем является x = 3

В уравнениях с несколькими переменными корнем является набор значений переменных, дающих верное равенство.

Формулы сокращенного умножения

Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Эта формула позволяет быстро разложить разность квадратов на произведение суммы и разности.

Квадрат суммы/разности

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Универсальная формула для возведения в квадрат суммы или разности двух выражений.

Способ решения уравнений с квадратами выражений

> **Главное правило:** Если квадраты двух выражений равны, то равны либо сами выражения, либо они противоположны по знаку.

$$F(x)^2 = G(x)^2 \Leftrightarrow F(x) = G(x) \text{ или } F(x) = -G(x)$$

Квадратные уравнения и дискриминант

Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, корни вычисляются по следующим формулам:

1

Формулы корней

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант

2

Анализ дискриминанта

- **D > 0:** два различных корня
- **D = 0:** один корень: $x = -\frac{b}{2a}$
- **D < 0:** действительных корней нет

3

Разложение на множители

Если уравнение имеет корни x_1 и x_2:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

От дискриминанта зависит количество корней уравнения, поскольку квадратный корень можно извлечь не из каждого числа.

Теорема Виета

Теорема Виета

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Приведённое уравнение

Определение: уравнение, в котором старший коэффициент равен единице.

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Неприведённое уравнение

Теорема Виета для общего случая:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Теорема Виета позволяет быстро проверить правильность найденных корней и находить один корень, зная другой.

Частные случаи квадратных уравнений

Математические «фокусы» — запомни эти признаки для быстрого решения!

Свободный член равен нулю (c = 0)

$$c = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Пример: $5x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(5x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -0{,}6$

Отсутствует линейный член (b = 0)

$$b = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad (\text{если } -\frac{c}{a} \geq 0)$$

Пример: $4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm 1{,}5$

Сумма коэффициентов равна нулю (a + b + c = 0)

$$a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

Пример: $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow 2 - 5 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$

Коэффициенты «через один» равны нулю (a - b + c = 0)

$$a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

Пример: $3x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow 3 - 5 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{3}$

Корни взаимно обратные (a = c)

Если первый и последний коэффициент равны, то произведение корней равно единице.

Пример: $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$

Дробно-рациональные уравнения

1

Определение

Дробно-рациональное уравнение — уравнение вида:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

где P(x) и Q(x) — многочлены

2

Область допустимых значений (ОДЗ)

Значения переменной, при которых выражение имеет смысл

Важно: знаменатель не должен равняться нулю!

Пример решения

Рассмотрим уравнение $\frac{x+1}{x-1} = 0$

1

Шаг 1: Найдём ОДЗ

Дробь имеет смысл, если знаменатель не равен нулю:

$x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

ОДЗ: $x \neq 1$

2

Шаг 2: Решаем уравнение

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю:

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

3

Шаг 3: Проверяем ОДЗ

Значение x = -1 принадлежит ОДЗ

Ответ: $x = -1$

Кубические уравнения

Определение

Кубическое уравнение — это уравнение третьей степени, в котором наивысшая степень переменной равна 3.

Общий вид: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где a, b, c, d — коэффициенты ($a \neq 0$)

Пример решения: $2x^3 - 4x^2 - 6x = 0$

Шаг 1: Вынесение общего множителя

Вынесем общий множитель 2x за скобки:

$$2x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

Шаг 2: Приравнивание к нулю

Приравняем каждый множитель к нулю:

$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Шаг 3: Решение квадратного уравнения

Найдём дискриминант:

$D = 4 + 12 = 16$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$x_2 = 3, \quad x_3 = -1$

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = -1$